

# Vorlesung 3a

## Der Erwartungswert

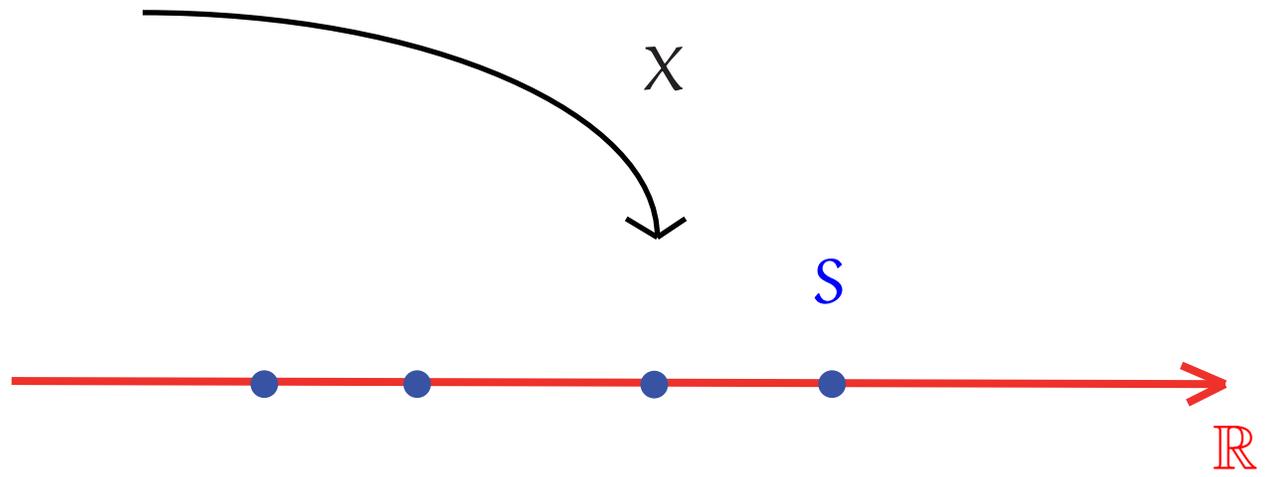
von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

### Teil 1

Der Erwartungswert als gewichtetes Mittel

(Buch S. 23)

Unter einer **diskreten reellwertigen** Zufallsvariablen verstehen wir eine ZV'e, deren Wertebereich **die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen** (oder einer Teilmenge davon) ist, und für die eine **endliche oder abzählbar unendliche Menge  $S$  ( $\subset \mathbb{R}$ )** existiert mit  **$\mathbf{P}(X \in S) = 1$** .

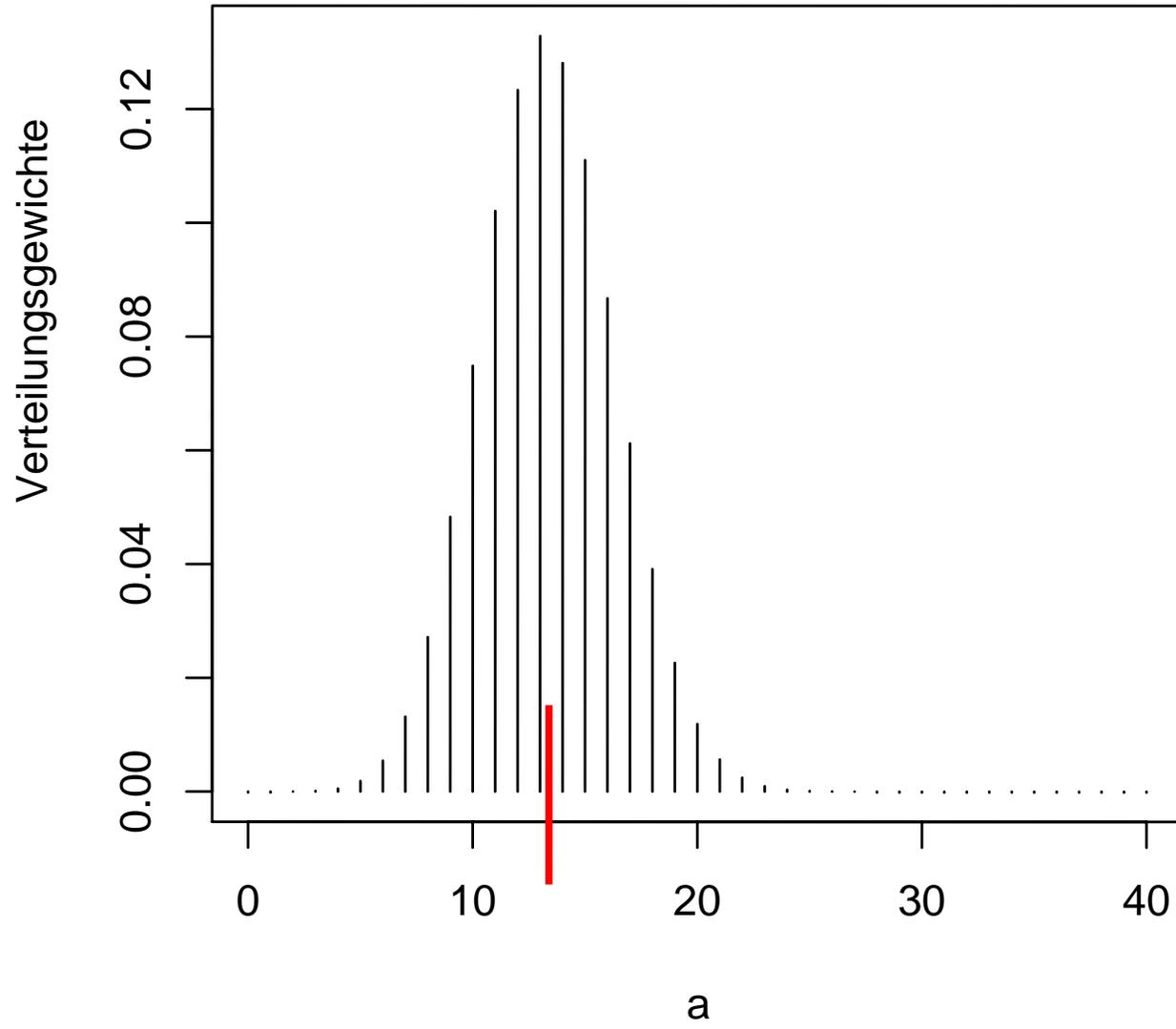


Eine einprägsame Kenngröße  
für die *Lage* der Verteilung von  $X$

ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel  
der möglichen Werte von  $X$ :

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) .$$

Man spricht vom *Erwartungswert von  $X$* .  
(Wir bezeichnen ihn auch mit  $\mu$  oder  $\mu_X$ .)



Das elementarste Beispiel:

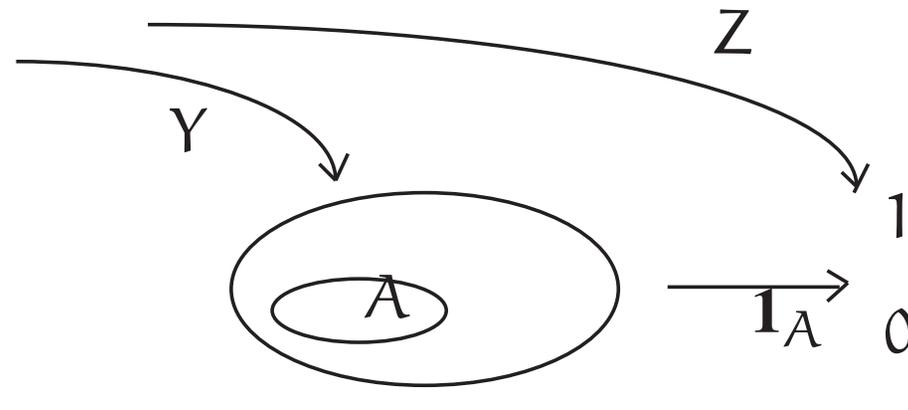
$$Z = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

$Z$  beschreibt also einen einfachen  $p$ -Münzwurf.

$$\mathbf{E}[Z] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1).$$

## Indikatorvariable von Ereignissen



$$Z = \mathbf{1}_A(Y) =: I_{\{Y \in A\}}$$

.... die *Indikatorvariable* des Ereignisses  $\{Y \in A\}$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1)$$

$$\{Z = 1\} = \{Y \in A\}$$

$$\mathbf{E}[I_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

$$\mathbf{E}[I_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Erwartungswert der Indikatorvariable des Ereignisses.

Für eine diskrete reellwertige ZV'e  $X$  hatten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{a \in S} a \mathbf{P}\{X = a\} \\ &= \sum_{a \in S} a \rho(a). \end{aligned}$$

Dabei sind die Zahlen  $\rho(a)$  die Verteilungsgewichte von  $X$ .

Merke:

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $X$   
hängt nur von ihrer Verteilung  $\rho$  ab.

Synonym sprechen wir daher auch manchmal vom  
*Erwartungswert der Verteilung  $\rho$*  .

Gilt  $S \subset \mathbb{R}_+$  oder  $\sum_{a \in S} |a| \rho(a) < \infty$ ,

dann hängt der Summenwert  $\sum_{a \in S} a \rho(a)$   
nicht von der Reihenfolge der Summanden ab.

Man sagt dann:

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $X$  mit Verteilung  $\rho$

ist wohldefiniert

oder kurz: Der Erwartungswert von  $X$  *existiert*.

Merke:

$X$

ist eine Zufallsgröße;

$E[X]$

ist eine Zahl.